

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ ГОМЕОМОРФНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ, НАЙДЕННОМ Н.В. ЕФИМОВЫМ¹

В. А. Александров

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

и Новосибирский государственный университет

e-mail: alex@math.nsc.ru

УДК 514.772, 517.938

Ключевые слова: диффеоморфизм, полная поверхность, гауссова кривизна, гипотеза якобиана, устойчивость по Ляпунову.

Аннотация

В 1968 году Н. В. Ефимов доказал следующую замечательную теорему:

Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1$, причём $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $a = a(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливы неравенства $|1/a(x) - 1/a(y)| \leq C_1|x - y| + C_2$ и $|\det f'(x)| \geq a(x)|\text{rot } f(x)| + a^2(x)$. Тогда $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно.

Здесь $\text{rot } f(x)$ обозначает ротор функции f в точке $x \in \mathbb{R}^2$.

Данна статья является обзором аналогов этой теоремы, её обобщений и приложений в теории поверхностей, теории функций, а также в исследованиях по гипотезе якобиана и глобальной асимптотической устойчивости динамических систем.

Abstract

Victor Alexandrov, On a differential test of homeomorphism, found by N. V. Efimov.

In the year 1968 N. V. Efimov has proven the following remarkable theorem:

Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1$ be such that $\det f'(x) < 0$ for all $x \in \mathbb{R}^2$ and let there exist a function $a = a(x) > 0$ and constants $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ such that the inequalities $|1/a(x) - 1/a(y)| \leq C_1|x - y| + C_2$ and $|\det f'(x)| \geq a(x)|\text{curl } f(x)| + a^2(x)$ hold true for all $x, y \in \mathbb{R}^2$. Then $f(\mathbb{R}^2)$ is a convex domain and f maps \mathbb{R}^2 onto $f(\mathbb{R}^2)$ homeomorphically.

Here $\text{curl } f(x)$ stands for the curl of f at $x \in \mathbb{R}^2$.

This article is an overview of analogues of this theorem, its generalizations and applications in the theory of surfaces, theory of functions, as well as in the study of the Jacobian conjecture and global asymptotic stability of dynamical systems.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 10-01-91000-анф), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт 02.740.11.0457) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-6613.2010.1).

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из крупнейших достижений математики XIX века стало создание геометрии Лобачевского или, как сейчас принято говорить, — гиперболической геометрии. При этом принципиальное значение имел вопрос о внутренней непротиворечивости такой геометрии. Первое продвижение в этом направлении сделал в 1868 году Э. Бельтрами в работе «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии», см. [14] или русский перевод в [11, с. 342–365]. Он доказал, что *специальные² области плоскости Лобачевского могут быть изометрично отображены на подходящие области на псевдосфере*, т. е. на поверхности, образуемой вращением трактисы около её асимптоты. Этот результат был воспринят современниками Э. Бельтрами, в сущности, как доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Впрочем, не в каждой точке псевдосфера существует касательная плоскость и для полного успеха нужно было бы найти в трёхмерном евклидовом пространстве регулярную поверхность, изометричную всей плоскости Лобачевского.

Однако в 1901 году Д. Гильберт доказал, что это невозможно, см. [23] или русский перевод в [4, Добавление V]. А именно, он доказал, что *в трёхмерном евклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности с отрицательной и постоянной гауссовой кривизной*. В результате доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского пошло другим путём, однако вопрос о том насколько существенно требование постоянства гауссовой кривизны в теореме Д. Гильберта долгое время оставался открытым.

Только в 1964 году в Н. В. Ефимов полностью снял это ограничение, доказав, что *в трёхмерном евклидовом пространстве невозможна полна регулярна поверхность с гауссовой кривизной $K \leq \text{const} < 0$* , см. [7] или [10]. Для доказательства он разработал оригинальный метод исследования сферического отображения, называемый иногда «методом вогнутой опоры», с помощью которого в 1968 году доказал следующие две теоремы:

Теорема 1 (Н. В. Ефимов [8]). *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , при чём якобиан отображения f всюду отрицателен, т. е. $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительная функция $a = a(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство*

$$\left| \frac{1}{a(x)} - \frac{1}{a(y)} \right| \leq C_1 |x - y| + C_2. \quad (1)$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$|\det f'(x)| \geq a(x) |\text{rot } f(x)| + a^2(x),$$

то $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно.

²А именно, области одного из следующих трёх типов: (i) заключённые между двумя пересекающимися прямыми и ортогональной им окружностью, (ii) заключённые между двумя расходящимися прямыми, их общим перпендикуляром и ортогональной к ним эквидистантой, и (iii) заключённые между двумя параллельными прямыми и ортогональным к ним орициклом.

Замечание 1. Здесь $\text{rot } f(x)$ означает ротор функции f в точке $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, т. е.

$$\text{rot } f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

Замечание 2. Если функция $1/a(x)$ имеет экспоненциальный рост (так что условие (1) грубо не соблюдается), то утверждение теоремы 1 даже для потенциальных отображений (т. е. таких, что $\text{rot } f(x) \equiv 0$) может не иметь места. Например, для отображения $f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \sin x_2, e^{x_1} \cos x_2)$ имеем $\text{rot } f(x) \equiv 0$, $\det f'(x_1, x_2) = -e^{2x_1}$, $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, и каждая точка из $f(\mathbb{R}^2)$ имеет бесконечное число прообразов.

Теорема 2 (Н. В. Ефимов [8]). *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 и пусть существует постоянна $a = \text{const} > 0$, такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство*

$$|\det f'(x)| \geq a|\text{rot } f(x)| + a^2.$$

Тогда $f(\mathbb{R}^2)$ есть либо бесконечная полоса между параллельными прямыми, либо полуплоскость, либо плоскость и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно.

Замечание 3. Условия теоремы 2 заведомо выполнены, если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ справедливы неравенства $|\det f'(x)| \geq \text{const} > 0$ и $|\text{rot } f(x)| \leq \text{const}$.

В настоящей статье речь идёт о следе, оставленном теоремами 1 и 2 в математике. Точнее, мы даём обзор аналогов этих теорем, их обобщений и приложений, за последние 40 лет. Отдельные разделы посвящены обзору работ, мотивированных исследованиями по теории поверхностей, теории функций, исследованиям по гипотезе якобиана и глобальной асимптотической устойчивости динамических систем.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ, МОТИВИРОВАННЫЕ ТЕОРИЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В статьях Б. Е. Кантора [9] и С. П. Гейсберга [3], опубликованных в 1970 году и посвящённых изучению нормального образа полной поверхности отрицательной кривизны, исследован, в частности, вопрос о том, какая из указанных Н. В. Ефимовым в теореме 2 возможностей для $f(\mathbb{R}^2)$ в действительности реализуется. Опишем эти результаты, вошедшие в учебник [2, § 31], подробнее.

Для линейного отображения $f_1(x_1, x_2) = x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1$ область $f(\mathbb{R}^2)$ является плоскостью. Так что в условиях теоремы 2 область $f(\mathbb{R}^2)$ действительно может быть плоскостью.

В [9] Б. Е. Кантор привёл пример следующего отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_1(x_1, x_2) = \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + e^{-2x_2}}) + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + e^{-2x_2}}, \quad (2)$$

для которого

$$\det f'(x) \equiv \text{const} < 0 \quad \text{и} \quad \text{rot } f(x) \equiv 0, \quad (3)$$

и, вместе с тем, $f(\mathbb{R}^2)$ есть полуплоскость. Так что и эта возможность, указанная в теореме 2, реализуется.

Основная идея Б. Е. Кантора состоит в том, что условия (3) будут заведомо выполнены, если отображение $f = (f_1, f_2)$ потенциально (т. е. если существует функция

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, называема потенциалом, такая, что $f_j = \partial\varphi/\partial x_j$ для $j = 1, 2$) и потенциал удовлетворяет уравнению Монжа – Ампера

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = -1.$$

Далее он использует классическое параметрическое представление для решений уравнения Монжа – Ампера [6] и получает не одно отображение (2), а целый класс нетривиальных примеров отображений $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условиям (3), для которых $f(\mathbb{R}^2)$ есть полуплоскость.

В [9] Б. Е. Кантор доказал также, что *если выполнены условия (3), то $f(\mathbb{R}^2)$ не может быть полосой* и высказал гипотезу о том, что *в условиях теоремы 2 Н.В. Ефимова область $f(\mathbb{R}^2)$ вообще не может быть полосой*. Эта гипотеза остаётся недоказанной и поныне.

С. Л. Гейсберг в [3] несколько усилил результат Б.Е. Кантора, показав, что *$f(\mathbb{R}^2)$ не может быть полосой ни в одном из следующих случаев*:

(а) *всюду вне некоторого круга выполнены условия $\operatorname{rot} f(x) \equiv 0$, $\det f'(x) = -g^2(x)$, $g(x) \geq \text{const} > 0$, причём функция g выпукла вниз*;

(б) *$\operatorname{rot} f(x) \equiv 0$, а $\det f'(x)$ есть многочлен, принимающий только отрицательные значения, равномерно отделённые от нуля*.

Метод, применяемый С. Л. Гейсбергом, близок оригинальному методу Н.В. Ефимова и основан на изучении характеристик отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, т.е. линий на плоскости (x_1, x_2) , на которых выполняются либо соотношения $df_1 = g(x_1, x_2)dx_2$ и $df_2 = -g(x_1, x_2)dx_1$, либо соотношения $df_1 = -g(x_1, x_2)dx_2$ и $df_2 = g(x_1, x_2)dx_1$.

Поскольку отображение g , обратное к потенциальному отображению f , само является потенциальным, то теорему 2 можно переформулировать следующим образом: *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ такова, что существует потенциальный обращающий ориентацию C^1 -диффеоморфизм g , отображающий область D на всю плоскость \mathbb{R}^2 и такой, что для всех $y \in \mathbb{R}^2$ и некоторой постоянной $b = \text{const} > 0$ выполнено неравенство $|\det g'(b)| \leq b$. Тогда D есть либо бесконечная полоса между параллельными прямыми, либо полуплоскость, либо плоскость*.

В диссертации Г. Я. Перельмана [12], посвящённой исследованию седловых поверхностей в евклидовых пространствах, изучен, в частности, вопрос о том, какими могут быть области D , если в предыдущем утверждении отказаться от требования ограниченности якобиана диффеоморфизма g . А именно, им получена следующая теорема:

Теорема 3 (Г. Я. Перельман [12, с. 78]). *Выпуклые области, допускающие потенциальный обращающий ориентацию C^1 -диффеоморфизм на плоскость – это в точности области из следующего списка:*

- (1) *треугольники;*
- (2) *четырёхугольники;*
- (3) *плоскость;*
- (4) *полуплоскость;*
- (5) *полоса;*

- (6) угол;
- (7) полуполоса;
- (8) угол с отрезанной вершиной;
- (9) полуполоса с отрезанной вершиной.

Доказательство теоремы 3, предложенное Г. Я. Перельманом, является модификацией доказательства теоремы 2, данного Н. В. Ефимовым.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ, МОТИВИРОВАННЫЕ ТЕОРИЕЙ ФУНКЦИЙ

В работах [1, 13] показано, что следующая теорема эквивалентна теореме 1 Н. В. Ефимова.

Теорема 4 (В. А. Александров [1, 13]). *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ принадлежит классу C^1 , причём $\det f'(x) < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Пусть, кроме того, существуют положительные функции $a(x) > 0$ и неотрицательные постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство*

$$\left| \frac{1}{a(x)} - \frac{1}{a(y)} \right| \leq C_1 |x - y| + C_2.$$

Тогда если для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$|\mu_2(x)| \geq |\mu_1(x)| \geq a(x),$$

где $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ — собственные числа линейного отображения $f'(x)$, то $f(\mathbb{R}^2)$ есть выпуклая область и f отображает \mathbb{R}^2 на $f(\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно.

Предложенное в [1, 13] доказательство теоремы 4 состоит в том, чтобы убедиться, что из условий теоремы 4 вытекают условия теоремы 1 Н. В. Ефимова. Как указано в [1, 13], Н. С. Даирбековым было замечено что и наоборот из условий теоремы 1 вытекают условия теоремы 4. В этом смысле теоремы 1 и 4 эквивалентны.

Теорема 4, по нашему мнению, указывает направление, в котором следует искать многомерные аналоги теоремы 1 Н. В. Ефимова. Для большей ясности сформулируем простейшую гипотезу, лежащую в этом направлении.

Гипотеза 1 (В. А. Александров [1, 13]). *Пусть $n \geq 2$ и $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^1 , причём $\det f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, существует постоянная $K < +\infty$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\rho(f'(x)^{-1}) \leq K,$$

где $\rho(f'(x)^{-1})$ — спектральный радиус линейного отображения $f'(x)^{-1}$, т. е. максимум модуля его собственных чисел. Тогда $f(\mathbb{R}^n)$ является выпуклой областью и отображение f инъективно.

Заметим, что, как следует из теоремы 4, при $n = 2$ и $\det f'(x) < 0$ гипотеза 1 верна.

В теории функций хорошо известен цикл результатов, обычно называемых «теоремой о глобальной обратной функции». По-видимому, первый результат такого рода был получен Ж. Адамаром [22] в 1906 году для отображений \mathbb{R}^2 в себя. Со временем

выяснилось, что подобного рода утверждения справедливы и для отображений банаховых пространств. Для определённости мы сформулируем один из этих результатов:

Теорема 5 (Р. Пласток [26]). *Пусть b и B — банаховы пространства, а непрерывно дифференцируемое отображение $f : b \rightarrow B$ является локальным гомеоморфизмом, причём линейное отображение $f'(x)$ обратимо при любом $x \in b$ и*

$$\int_0^{+\infty} \inf_{\substack{\|x\| \leq t \\ x \in b}} \|f'(x)^{-1}\|^{-1} dt = +\infty. \quad (4)$$

Тогда f взаимно однозначно отображает b на всё пространство B .

Отметим, что если существует постоянная $K < +\infty$ такая, что для всех $x \in b$ справедливо неравенство

$$\|f'(x)^{-1}\| \leq K, \quad (5)$$

то условие (4) теоремы 5 заведомо выполнено. А поскольку $\rho(f'(x)^{-1}) \leq \|f'(x)^{-1}\|$, то для отображений пространства \mathbb{R}^n , удовлетворяющих условию (5), гипотеза 1 заведомо верна. Более того, для таких отображений $f(\mathbb{R}^n)$ не просто является выпуклой областью, но совпадает с \mathbb{R}^n .

Укажем ещё один естественный вопрос, связанный с гипотезой 1, остающийся открытым до сих пор. Он состоит в том, чтобы *найти оценку радиуса шара, где существует обратное отображение f^{-1} , в терминах спектрального радиуса $\rho(f'(x)^{-1})$* , аналогичную оценке из следующей теоремы, обобщающей теорему 5:

Теорема 6 (Ф. Джон [24]). *Пусть b и B — банаховы пространства, $\omega \subset b$ — шар радиуса r с центром x , $f : \omega \rightarrow B$ — локальный C^1 -гомеоморфизм. Тогда обратное отображение f^{-1} существует в шаре $\Omega \subset B$ с центром $f(x)$ и радиусом*

$$R = \int_0^r \inf_{\substack{\|x-y\| \leq t \\ y \in \omega}} \|f'(y)^{-1}\|^{-1} dt.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ, МОТИВИРОВАННЫЕ ГИПОТЕЗОЙ ЯКОБИАНА

Знаменитая гипотеза якобиана утверждает, что *если $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ полиномиально и $\det f'(x) \neq 0$ для всякого $x \in \mathbb{C}^n$, то f имеет полиномиальное обратное*. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ и каждая компонента $f_j(x)$ является многочленом от n переменных x_1, \dots, x_n .

Гипотезе якобиана посвящена обширная литература, см. например, книгу [19] и указанные в ней ссылки. Однако в приведённом выше виде она не доказана до сих пор. О её значении говорит, хотя бы, тот факт, что С. Смейл включил её в свой знаменитый список «Математические проблемы для следующего века» [28].

Отметим, что известны различные дополнительные условия на отображение f , при выполнении которых гипотеза якобиана заведомо справедлива. Одним из таких дополнительных условий является требование инъективности отображения f .³ Этим объясняется интерес специалистов по проблеме якобиана к условиям, гарантирующим инъективность отображений. Укажем одну из высказанных ими гипотез:

Гипотеза 2 (М. Чемберлэнд [15]). *Пусть $n \geq 1$ и $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^1 , причём $\det f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, существует постоянная $K < +\infty$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\rho(f'(x)^{-1}) \leq K,$$

где $\rho(f'(x)^{-1})$ — спектральный радиус линейного отображения $f'(x)^{-1}$. Тогда отображение f инъективно.

Подчеркнём, что гипотеза 2 в целом совпадает с гипотезой 1, хотя формально и слабее последней. Но и гипотеза 2 на сегодня остаётся открытой. Наиболее близким к ней по духу результатом является следующая теорема:

Теорема 7 (М. Чемберлэнд, Г. Мейстерс [15]). *Пусть $n \geq 1$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что $\det f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\rho\left(\left(f'(x)f'(x)^*\right)^{-1}\right) \leq \text{const},$$

где $\rho(L)$ — спектральный радиус линейного отображения L , а L^* — отображение, сопряжённое к L . Тогда f инъективно.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ, МОТИВИРОВАННЫЕ ИЗУЧЕНИЕМ ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проблема глобальной асимптотической устойчивости динамических систем на плоскости может быть сформулирована так: *Рассмотрим автономную систему на плоскости*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (6)$$

для которой точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ является особой⁴, а собственные числа матрицы Якоби отображения $f = (f_1, f_2)$ имеют отрицательные вещественные части в любой точке плоскости.

Верно ли, что тогда тривиальное решение $(x_1, x_2) = (0, 0)$ глобально асимптотически устойчиво, т. е. верно ли, что любое решение стремится к точке $(0, 0)$ при $t \rightarrow \infty$?

³Элементарное доказательство того, что если f инъективно, то оно сюръективно и f^{-1} полиномиально, дано в [27].

⁴Т. е. $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$.

Проблема глобальной асимптотической устойчивости играет важную роль в теории и приложениях динамических систем, см., например, [17].

Согласно знаменитой теореме Ляпунова, автономная система линейных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, является асимптотически устойчивой, если все собственные значения постоянной матрицы A имеют отрицательные действительные части. Таким образом, проблема глобальной асимптотической устойчивости отвечает на вопрос о том можно ли делать вывод об асимптотической устойчивости любого решения нелинейной системы (6), как только установлена асимптотическая устойчивость любого решения каждой линеаризованной системы.

В 1963 году Ч. Олех обнаружил тесную связь между проблемой глобальной асимптотической устойчивости и инъективностью некоторых отображений. А именно, он доказал следующую теорему:

Теорема 8 (Ч. Олех [25]). *Следующие два утверждения эквивалентны:*

(1) *проблема глобальной асимптотической устойчивости имеет положительное решение;*

(2) *всякое непрерывно дифференцируемое отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, собственные числа матрицы Якоби которого всюду имеют отрицательные вещественные части, с необходимостью инъективно.*

В 1994–1995 годах положительное решение проблемы глобальной асимптотической устойчивости почти одновременно, но независимо друг от друга, получили А. А. Глущук [5], Р. Фесслер [20] и К. Гутьеррес [21]. Все три решения опираются на теорему Олеха. При этом интерес к проблеме глобальной асимптотической устойчивости не исчезает, напротив, — появляются всё новые её доказательства, см., например, [16]. Более того, специалисты по глобальной асимптотической устойчивости получили разнообразные дифференциальные признаки инъективности отображений, родственные теоремам 1 и 2, и лежащие в русле гипотез 1 и 2. Приведём здесь лишь два из них. Для этого обозначим через $\text{Spec}(f)$ совокупность всех собственных значений линейных отображений $f'(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 9 (К. Гутьеррес [21]). *Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ таково, что $\text{Spec}(f) \cap [0, +\infty) = \emptyset$. Тогда f инъективно.*

Теорема 10 (М. Кобо, К. Гутьеррес, Ж. Ллибрэ [18]). *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывно дифференцируемое отображение и пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\text{Spec}(f) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$. Тогда f инъективно.*

Связь этих теорем с гипотезами 1 и 2, а значит, и с теоремами 1 и 2 Н. В. Ефимова, очевидна. Например, используя обозначение $\text{Spec}(f)$ гипотезу 2 можно сформулировать так: *Если непрерывно дифференцируемое отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что круг с центром в нуле и радиусом $\varepsilon > 0$ на комплексной плоскости не пересекается с множеством $\text{Spec}(f)$, то f инъективно.* Таким образом, при $n = 2$, теорема 10 показывает, что справедливо даже более сильное, чем гипотеза 2, утверждение: в этом случае для инъективности f достаточно потребовать, чтобы

$\text{Spec}(f)$ не пересекался только с достаточно малым интервалом $(-\varepsilon, \varepsilon)$ вещественной оси, а не с целым кругом радиуса ε с центром в нуле.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья является записью доклада, прочитанного автором на Международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посвященной 100-летию со дня рождения Николая Владимировича Ефимова и его научному наследию, проходившей с 18-го по 21-е августа 2010 года на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

В статье упомянуты все известные нам области математики, связанные с теоремами 1 и 2 Н. В. Ефимова. Но, будучи ограничены во времени, зачастую мы не могли в пределах каждой области перечислить все результаты, связанные с теоремами 1 и 2. В такой ситуации мы приводили только самые сильные в своей области результаты, доступные нам на момент написания статьи. Следует иметь ввиду, что зачастую эти результаты были получены неоднократным улучшением более ранних и менее общих теорем. Ссылки на последние заинтересованный читатель может найти в цитируемых нами работах.

Однако даже из нашего краткого изложения видно, что в теоремах 1 и 2 Н. В. Ефимов открыл глубокий математических факт, который связан с разными разделами математики, который непосредственно стимулировал исследования одних математиков, либо был переоткрыт заново другими, не знакомыми с работами Н. В. Ефимова. Этот факт прочно связан с именем Николая Владимировича Ефимова и продолжает до сих пор интересовать математиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров, В. А. К теореме Ефимова о дифференциальных признаках гомеоморфизма // Мат. сборник. 1990. Т. 181, №2. С. 183–188.
- [2] Бакельман, И. Я., Вернер, А. Л., Кантор, Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М.: Наука, 1973.
- [3] Гейсберг, С. Л. О свойствах нормального отображения, порождаемого уравнением $rt - s^2 = -f^2(x, y)$ // Мат. сборник. 1970. Т. 82, № 2. С. 224–232.
- [4] Гильберт, Д. Основания геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
- [5] Глуцюк, А. А. Полное решение проблемы якобиана для векторных полей на плоскости // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 3. С. 179–180.
- [6] Гурса, Э. Курс математического анализа. Т. III, ч. 2. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
- [7] Ефимов, Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сборник. 1964. Т. 64, № 2. С. 286–320.
- [8] Ефимов, Н. В. Дифференциальные признаки гомеоморфности некоторых отображений с применением в теории поверхностей // Мат. сборник. 1968. Т. 76, № 4. С. 499–512.
- [9] Кантор, Б. Е. К вопросу о нормальном образе полной поверхности отрицательной кривизны // Мат. сборник. 1970. Т. 82, № 2. С. 220–223.
- [10] Клотц-Милнор, Т. Теорема Ефимова о полных погруженных поверхностях отрицательной кривизны // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 5. С. 3–57.
- [11] Норден, А. П. (ред.) Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. М.: ГИТТЛ, 1956.

- [12] Перельман, Г. Я. Седловые поверхности в евклидовых пространствах. Дисс.... канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛОМИ, 1990. 86 с.
- [13] Alexandrov, V. A. Remarks on Efimov's theorem about differential tests of homeomorphism // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1991. Vol. 36, no. 3–4. P. 101–105.
- [14] Beltrami, E. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea // Giornale di Matemat., Napoli. 1868. T. 6. P. 284–312.
- [15] Chamberland, M. and Meisters, G. A mountain pass to the Jacobian conjecture // Can. Math. Bull. 1998. Vol. 41, no. 4. P. 442–451.
- [16] Chen, P. N., He, J. X., and Qin, H. Sh. A proof of the Jacobian conjecture on global asymptotic stability // Acta Math. Sin., Engl. Ser. 2001. Vol. 17, no. 1. P. 119–132.
- [17] Chicone, C. Ordinary differential equations with applications. 2nd ed. New York: Springer, 2006. (Texts in Applied Mathematics. Vol. 34.)
- [18] Cobo, M., Gutierrez, C., and Llibre, J. On the injectivity of C^1 maps of the real plane // Can. J. Math. 2002. Vol. 54, no. 6. P. 1187–1201.
- [19] van den Essen, A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Basel: Birkhäuser, 2000. (Progress in Mathematics, Vol. 190.)
- [20] Fessler, R. A proof of the two-dimensional Markus–Yamabe stability conjecture and a generalization // Ann. Pol. Math. 1995. Vol. 62, no. 1. P. 45–74.
- [21] Gutierrez, C. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1995. Vol. 12, no. 6. P. 627–671.
- [22] Hadamard, J. Sur les transformations ponctuelles // Bull. Soc. Math. France. 1906. Vol. 34. P. 71–84.
- [23] Hilbert, D. Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung // Trans. Am. Math. Soc. 1901. Vol. 2. P. 87–99.
- [24] John, F. On quasi-isometric mappings. I // Comm. pure appl. math. 1968. Vol. 21, no. 1. P. 77–110.
- [25] Olech, C. On the global stability of an autonomous system in the plane // Contrib. Differential Equations. 1963. Vol. 1. P. 389–400.
- [26] Plastock, R. Homeomorphisms between Banach spaces // Trans. Am. Math. Soc. 1974. Vol. 200. P. 169–183.
- [27] Rudin, W. Injective polynomial maps are automorphisms // Am. Math. Mon. 1995. Vol. 102, no. 6. P. 540–543.
- [28] Smale, S. Mathematical problems for the next century. In: V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur (eds.). Mathematics: frontiers and perspectives. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. P. 271–294.

Статья поступила 18 октября 2010 г.